EXERCICE N°1 — 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-8=0$ et le plan P d'équation $x+2y+z-6=0$.

1°) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2°) On donne les points A(2, 0, 2) et B(2, 2, 0).

a) Vérifier que A appartient à la sphère (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit Q l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que MA = MB.

Montrer que Q est le plan d'équation $y=z$.

c) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=6-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

3°) Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

EXERCICE N°2 — 5 points

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2°) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-\dfrac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3°) a) Justifier que la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le tableau de signe ci-dessous pour préciser la position relative de C_f et (T).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)+\frac{3}{4}$		$-$	0	$+$	

c) Tracer (T) et C_f.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

4°) Soit λ un réel strictement positif On désigne par $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x = \lambda$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) Montrer que $\mathcal{A}_\lambda = -e^{-\lambda} + \ln(1+e^{-\lambda}) + 1 - \ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda$.

EXERCICE N°3 — 5 points

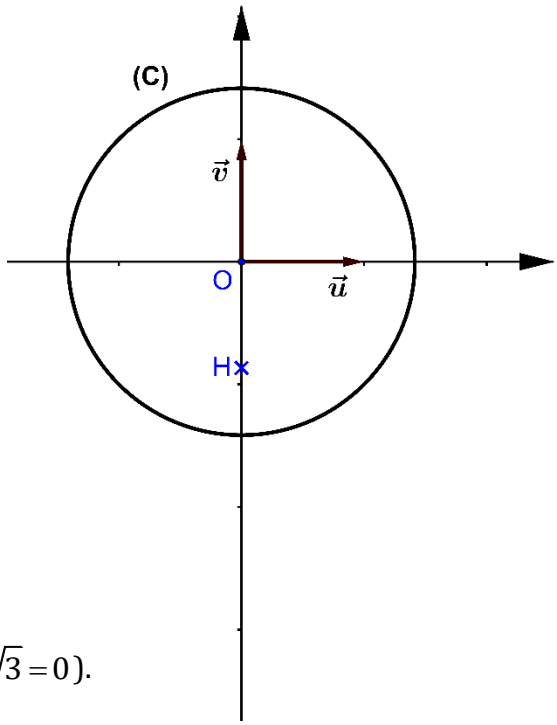
1°) Soit les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.

b) En déduire que, pour tout nombre complexe z, $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}\, z - 2$.

Dans la suite, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

2°) Dans la figure ci-contre, on a tracé le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $\dfrac{-i\sqrt{3}}{2}$.



a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

c) Construire les points M_1 et M_2.

3°) Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$.

Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives z et z^3.

a) Montrer que :

(K est le milieu du segment [M N]) si et seulement si $(z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0)$.

b) Vérifier que $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}\, z - 2)$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.

d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectives z_1^3 et z_2^3

(On rappelle que z_1 et z_2 sont les affixes des points M_1 et M_2).

e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O, \vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe a^3.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com